

Theoretische Grundlagen 1

Prüfung im Wintersemester 2003/04

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Hochschule Reutlingen - Reutlingen University

Fachbereich: Informatik

Bachelor-Studiengang/Semester: Medien- und Kommunikationsinformatik 1

Prüfer: Prof. Dr. Karlheinz Hug

Prüfungstermin (Datum, Uhrzeit) und Ort: Do 29. 1. 2004, 10³⁰-12³⁰ Uhr, Aula

Prüfungsdauer: 120 Minuten

Zugelassene Hilfsmittel: Alle (Vorlesungsmitschrift, Literatur,...)

Anzahl der Aufgabenseiten: 10

Aufgabe	Punkte		Aufgabe	Punkte	
	möglich	erreicht		möglich	erreicht
1	12		6	14	
2	14		7	18	
3	14		8	16	
4	20		9	16	
5	8		10	16	
Summe möglich:		148	Summe erreicht:		

- Zum Bestehen der Prüfung sind 60, für die Note „Eins“ 120 Punkte erforderlich.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben möglichst auf dazu freigelassenen Stellen im Text!
- Teilaufgaben sind meist unabhängig voneinander lösbar.

✌ **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1: Mengenformeln

(Punkte: 12 |.....)

L, M, N sind Teilmengen einer Grundmenge G . Geben Sie jeweils die bei jedem Schritt verwendeten Rechenregeln an!

- (1) Transformieren Sie die folgende Formel algebraisch in ca. fünf Schritten in eine möglichst einfache äquivalente Formel!

$$(L \cup M) \cap L \subseteq ((N \cup \bar{M}) \setminus (M \cap \bar{L})) \cup N$$

benutzte Regeln

≡

- (2) Beweisen Sie die folgende Gleichung algebraisch in ca. fünf Schritten!

$$((L \cup M) \setminus N) \cup (L \cap N) = L \cup (M \setminus N).$$

benutzte Regeln

Beweis. $((L \cup M) \setminus N) \cup (L \cap N) =$

Aufgabe 2: Produktmengen

(Punkte: 14 |.....)

 I und M_i, N_i für $i \in I$ sind nicht leere Mengen.

- (1) Beweisen Sie die folgende Mengengleichung in ca. fünf Schritten, indem Sie eine prädikatenlogische Rechenregel nutzen!

$$\prod_{i \in I} M_i \cap \prod_{i \in I} N_i = \prod_{i \in I} (M_i \cap N_i).$$

Beweis. $(x_i) \in \prod M_i \cap \prod N_i \Leftrightarrow$

- (2) Zeigen Sie anschaulich mit zwei Skizzen (für jede Seite eine), warum in der folgenden Gleichung *nicht* „=" gilt!

$$M_1 \times M_2 \cup N_1 \times N_2 \subseteq (M_1 \cup N_1) \times (M_2 \cup N_2).$$

- (3) Verallgemeinern Sie die Formel von (2) auf eine beliebige Indexmenge I (statt $\{1, 2\}$) und markieren Sie im Beweis zu (1) die Stelle, die *nicht* analog gilt, mit *!

Aufgabe 3: Algebra der Aussagenlogik

(Punkte: 14 |.....)

- (1) Transformieren Sie die folgende Aussage schrittweise algebraisch in eine möglichst einfache logisch äquivalente Aussage!

$$(1 \Leftrightarrow x < 3) \wedge (x \leq 2 \vee x \geq 2) \wedge ((x < 3 \wedge x > 4) \Rightarrow y \geq 9)$$

≡

- (2) Stellen Sie die folgende Aussage und ihre Negation jeweils in einer Normalform dar und geben Sie dazu die Art der Normalform an!

$$(\neg a \not\Rightarrow b) \wedge ((c \vee a) \Rightarrow b)$$

≡

Negation:

- (3) Beweisen Sie algebraisch, dass die folgende Aussage allgemeingültig ist!

$$((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \wedge B)) \vee ((B \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B))$$

≡

Aufgabe 4: Logeleien

(Punkte: 20 |.....)

- (1) **Kriminalfall:** Der Kommissar weiß über drei Tatverdächtige *A*, *B*, *C*:
- (a) Wenn *A* und *B* nicht beide beteiligt waren, dann ist *C* unschuldig.
 - (b) Ist *B* der Täter oder *C* unschuldig, so ist *A* unschuldig.
 - (c) Mindestens einer der drei Verdächtigen war Täter.

Finden Sie den Täter mit beliebigen Methoden in nachvollziehbaren Schritten!

(2) **Lügendgeschichte:** Die Personen A , B , C behaupten über sich:

- (a) A : „Wenn B lügt, dann sagt C die Wahrheit.“
- (b) B : „Mindestens A oder C lügt, vielleicht sogar beide.“
- (c) C : „Wenn A lügt, dann ist B ehrlich.“

Finden Sie in nachvollziehbaren Schritten (Tipp: mittels Einsetzungsmethode) heraus, wer lügt und wer die Wahrheit sagt!

Aufgabe 5: Wahrheitstabelle und Normalformen

(Punkte: 8 |.....)

a	b	c	$A(a, b, c)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Geben Sie zu dieser Wahrheitstabelle je eine kanonische DNF und KNF und je eine andere, möglichst minimale Normalform an!

KNDF:

DNF:

KKNF:

KNF:

Aufgabe 6: Beweise mit etwas Prädikatenlogik

(Punkte: 14 |.....)

Die axiomatische Mengenlehre kennt das Klassenbildungsaxiom

$$\exists M \forall x : (x \in M \Leftrightarrow \mathbf{Mg}(x) \wedge P(x)).$$

(mit $\mathbf{Mg}(x)$ für „ x ist eine Menge“). Verbalisieren Sie die folgenden zwei Sätze und nutzen Sie die Prädikate $P_1(x) = (x \in x \Leftrightarrow x \notin x)$ und $P_2(x) = x \notin x$ und die Ersetzung $x \mapsto M$ an geeigneter Stelle, um die Sätze aus dem Axiom abzuleiten!

(1) $\exists M \forall x : x \notin M.$

Verbal:

Beweis.

(2) $\exists M : (M \notin M \wedge \neg \mathbf{Mg}(M)).$

Verbal:

Beweis.

Aufgabe 7: Prädikatenlogische Formeln

(Punkte: 18 |.....)

Geben Sie zur folgenden prädikatenlogischen Formel alle *echten* Teilformeln und dazu jeweils die syntaktischen Eigenschaften der Variablen (frei, gebunden) sowie alle Teilterme an!

$$\forall x \exists y : (\forall z : P(x, f(z)) \Rightarrow Q(y)) \wedge (\exists x : R(g(x), y) \vee S(z)).$$

Echte Teilformeln:

darin frei:

gebunden:

Teilterme:

Bereinigen Sie die Formel!

Transformieren Sie die Formel in eine bereinigte Pränexform nur mit \neg , \wedge , \vee !

Negieren Sie die Formel und bringen Sie alle Negationen möglichst weit nach innen!

Aufgabe 8: Aussagen formalisieren

(Punkte: 16 |.....)

Stellen Sie die Sätze prädikatenlogisch mit geeigneten Prädikaten und Funktionen dar!

- (1) Alle Räder sind rund.
- (2) Was rund und geölt ist, rollt gut.
- (3) Es gibt ein Rad, das nicht gut rollt.
- (4) Das Vorderrad und das Hinterrad eines Fahrrads rollen richtungsgleich.
- (5) Genau das, was genau zwei Räder hat, ist ein Fahrrad.

Aufgabe 9: Induktive Definitionen

(Punkte: 16 |.....)

- (1) Die Sprache S über dem Alphabet $\{0, 1, +, *, (,)\}$ ist induktiv definiert durch:

atomare Wörter: $0, 1 \in S$.

zusammengesetzte Wörter: $a, b \in S \Rightarrow (a + b), (a * b) \in S$.

Geben Sie ein Wort aus S an, das mindestens 15 Zeichen lang ist!

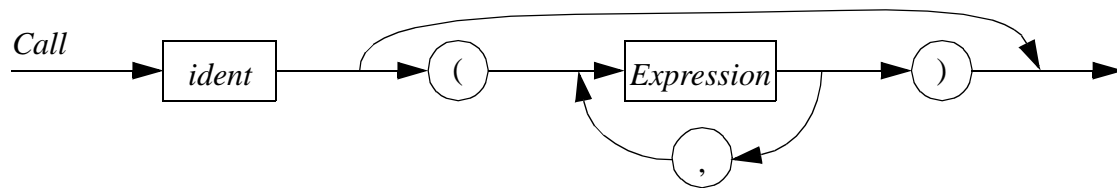
Geben Sie zwei EBNF-Regeln an, die S beschreiben (eindeutige Zerlegbarkeit von Wörtern ist *nicht* gefordert)!

- (2) Das Alphabet $\{0, 1, \in, \neg, \wedge, \forall, (,), :\} \cup Va$ mit $Va = \{a, \dots, z\}$ reicht, um die Mathematik formal darzustellen. Definieren Sie die Syntax der Sprache M der mathematischen Formeln induktiv so, dass sie zu üblichen Formeln passt!

Aufgabe 10: Syntaxbeschreibungen

(Punkte: 16 |.....)

- (1) Stellen Sie das folgende Syntaxdiagramm mit einer EBNF-Regel dar!

*Call* =

- (2) Gegeben ist die vereinfachte Syntax einer Internetadresse in EBNF-Notation:

URL = *Protocol* „: / /“ *Hostname* [„/“ *Pathname*].*Protocol* = „file“ | „ftp“ | „http“.*Hostname* = *ident* „.“ („de“ | „com“).*Pathname* = *ident* { „/“ *ident* }.(lexikalische Einheit: *ident* = *letter* { *letter* | *digit* | „.“ | „-“ }.)

Zeichnen Sie zu den ersten vier dieser Regeln äquivalente Syntaxdiagramme!

Zeichnen Sie zum folgenden Wort den konkreten Syntax-Zerteilungsbaum (ohne *ident* in einzelne Zeichen zu zerteilen)!`http://www-mki.fh-reutlingen.de/b1/tg1.htm`