Theoretische Grundlagen 2

Prüfung im Sommersemester 2004 - Musterlösung

■ Aufgaben sind in Times-, *Lösungen in Arial-Kursiv-Schrift gehalten.*

Hochschule Reutlingen - Reutlingen University

Fachbereich:	Informatik
Bachelor-Studiengang/Semester:	Medien- und Kommunikationsinformatik 2
Prüfer:	Prof. Dr. Karlheinz Hug
Prüfungstermin (Datum, Uhrzeit) und Ort:	Fr 9. 7. 2004, 10^{30}-12^{30} Uhr, Aula
Prüfungsdauer:	120 Minuten
Zugelassene Hilfsmittel:	Alle (Vorlesungsmitschrift, Literatur,...)
Anzahl der Aufgabenseiten:	10

Aufgabe	**Punkte**		**Aufgabe**	**Punkte**	
	möglich	**erreicht**		**möglich**	**erreicht**
1	32		6	14	
2	10		7	10	
3	12		8	17	
4	18		9	20	
5	15				
Summe möglich:		**148**	**Summe erreicht:**		

■ Zum Bestehen der Prüfung sind 60, für die Note „Eins“ 120 Punkte erforderlich.

■ Bearbeiten Sie die Aufgaben möglichst auf dazu freigelassenen Stellen im Text!

■ Teilaufgaben sind meist unabhängig voneinander lösbar.

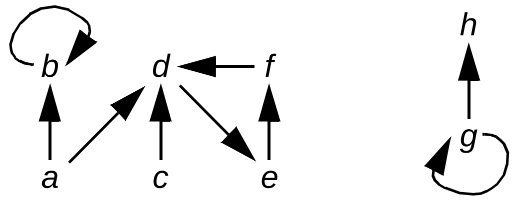
■ Geben Sie alle Aufgaben- und Lösungsblätter ab!

✌ **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1: Relation, Eigenschaften, Zugeordnetes (Punkte: 32 |..........)

Gegeben sind die Menge $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ und die Relation $R = \{(a, b), (a, d), (b, b), (c, d), (d, e), (e, f), (f, d), (g, g), (g, h)\} \subseteq M^2$.

Zeichnen Sie ein **Pfeildiagramm** zu R!



Begründen Sie, warum R folgende Eigenschaften *nicht* hat!

Eigenschaft	**fehlt, weil...**
linkstotal	*kein Pfeil bei h startet*
rechtstotal	*keine Pfeile auf a und c zielen*
linkseindeutig	*2 Pfeile auf b, 3 auf d zielen (statt 1)*
rechtseindeutig	*2 Pfeile bei a, 2 bei g starten (statt 1)*
reflexiv	*z.B.* $(a, a) \notin R$
irreflexiv	$(b, b), (g, g) \in R$
symmetrisch	*z.B.* $(a, b) \in R$, *aber* $(b, a) \notin R$
linear (konnex)	*z.B.* $(a, c) \notin R$ *und* $(c, a) \notin R$ *und* $a \neq c$
transitiv	*z.B.* $(a, d), (d, e) \in R$, *aber* $(a, e) \notin R$
azyklisch	*R nicht irreflexiv ist und den Zyklus (d, e), (e, f), (f, d) enthält*

Geben Sie die Mengen an!

Nachbereich ${}_aR$ = ... *{b, d}* ....; **Vorbereich** R_d = ... *{a, c, f}* ....

Geben Sie die **Umkehrrelation** und **Kompositionsprodukte** von R an!

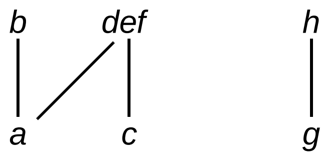
R^{-1}	$R^0 = \mathrm{id}_M$	$R^1 = R$	R^2	R^3
(b, a), (d, a), (b, b), (d, c), (e, d), (f, e), (d, f), (g, g), (h, g)	*(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (g, g), (h, h)*	(a, b), (a, d), (b, b), (c, d), (d, e), (e, f), (f, d), (g, g), (g, h)	*(a, b), (a, e), (b, b), (c, e), (d, f), (e, d), (f, e), (g, g), (g, h)*	*(a, b), (a, f), (b, b), (c, f), (d, d), (e, e), (f, f), (g, g), (g, h)*

Die kleinste R umfassende Äquivalenzrelation auf M hat ... *2* ... (**Anzahl**) Äquivalenzklassen.

Die reflexive und transitive Hülle von R ist eine Präordnung Q, die eine Äquivalenzrelation $\approx_Q$ auf M induziert. Die **Äquivalenzklassen** von $\approx_Q$ sind:

... *{a}, {b}, {c}, {d, e, f}, {g}, {h}* ....

Zeichnen Sie ein **Ordnungsdiagramm** zu der durch Q induzierten Halbordnung $\leq_Q$ auf $M / \approx_Q$!



Eine mit $\leq_Q$ verträgliche **Vollordnung** auf $M / \approx_Q$ ist:

... *z.B.: a → b → c → def → g → h (→ obere Nachbarrelation)* ....

Aufgabe 2: Eigenschaften von Abbildungen

(Punkte: 10 |..........)

Für eine endliche Menge M und eine Abbildung $f : M \to M$ gilt:

f ist surjektiv $\Leftrightarrow$ f ist injektiv $\Leftrightarrow$ f ist bijektiv.

Beweis.

(1) Ist f surjektiv, so gibt es ein N ⊆ M, sodass die Einschränkung f|N bijektiv ist. Da M endlich ist, muss N = M sein (Definition 4.53). Also ist f bijektiv.

(2) Ist f injektiv, so gibt es ein N ⊆ M, sodass f : M → N bijektiv ist. Da M endlich ist, muss N = M sein (Definition 4.53). Also ist f bijektiv.

(3) Ist f bijektiv, so ist f definitionsgemäß surjektiv und injektiv.

Die Abbildung $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, p \mapsto 2p$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.

Beweis.

*Für p, p' ∈ **Z** gilt: Aus 2p = g(p) = g(p') = 2p' folgt durch Kürzen p = p'. Daher ist g injektiv.*

*Zu 1 ∈ **Z** existiert kein p ∈ **Z** mit 2p = 1. Daher ist g nicht surjektiv.*

Die Abbildung $h : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, p \mapsto p \text{ div } 2$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.

Beweis.

*Für p ∈ **Z** gilt: h(2p) = (2p) div 2 = p. Daher ist h surjektiv.*

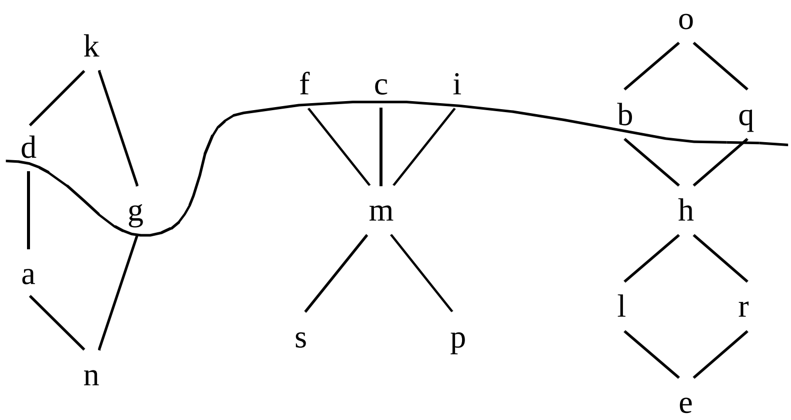
*Für 0, 1 ∈ **Z** gilt 0 ≠ 1 und h(0) = 0 div 2 = 0 = 1 div 2 = h(1). Daher ist h nicht injektiv.*

Aufgabe 3: Ordnungsrelation, Ketten, Antiketten (Punkte: 12 |..........)

Der **Satz von Dilworth** setzt eine endliche halbgeordnete Menge $\langle G, \leq \rangle$ voraus.

(1) Die minimale Mächtigkeit einer Zerlegung von G in Ketten ist gleich der maximalen Mächtigkeit einer Antikette in G.

Veranschaulichen Sie diese Aussage, indem Sie zu dem Ordnungsdiagramm angeben:



Eine **Zerlegung in** möglichst wenige **Ketten**: Mächtigkeit:

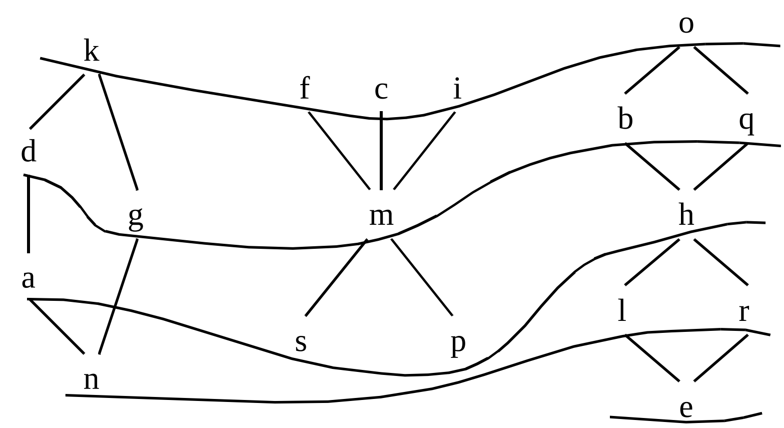
... *z.B.: nadk, g, smf, pc, i, elhbo, rq* .... *7* ...

Eine möglichst große **Antikette**: Mächtigkeit:

... *z.B.: dgfcibg* .... *7* ...

(1) Die minimale Mächtigkeit einer Zerlegung von G in Antiketten ist gleich der maximalen Mächtigkeit einer Kette in G.

Veranschaulichen Sie diese Aussage, indem Sie zu dem Ordnungsdiagramm angeben:



Eine **Zerlegung in** möglichst wenige **Antiketten**: Mächtigkeit:

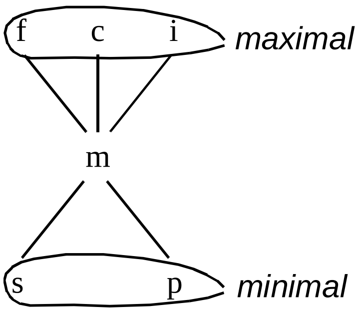
... *z.B.: kfcio, dgmbq, asph, nlr, e* .... *5* ...

Eine möglichst lange **Kette**: Mächtigkeit:

... *z.B.: elhbo* .... *5* ...

Aufgabe 4: Ordnungsrelation, Bereiche, Extrema (Punkte: 18 |..........)

Markieren Sie die (a) **minimalen**, (b) **maximalen Elemente** im Ordnungsdiagramm:



Geben Sie die Mengen an!

Nachbereich $_s{\leq}$ = ... *{s, m, f, c, i}* ....;

Vorbereich $\leq_f$ = ... *{f, m, s, p}* ....;

Intervall $[p, c]_{\leq} = {}_p{\leq} \cap {\leq}_c$ = ... *{p, m, c}* ....

Verfolgen Sie den **Ablauf des Algorithmus**

```
min(M) =
   result := ∅;
   L := M;
   WHILE L ≠ ∅ DO                          ASSERT result ⊂ min(M) ⊆ result ∪ L;
      x := ein z ∈ L;
      N := L \ {x};
      WHILE N ≠ ∅ DO
         y := ein z ∈ N;
         IF x < y THEN                     ASSERT y ∉ min(M);
            L := L \ {y}
         ELSIF y < x THEN                  ASSERT x ∉ min(M);
            L := L \ {x};
            x := y;
            N := L
         END;
         N := N \ {y}
      END;
      result := result ∪ {x};
      L := L \ {x};                        ASSERT result ⊆ min(M) ⊆ result ∪ L
   END;                                    ASSERT L = ∅ ∧ result = min(M).
```

mit der nach obigem Diagramm geordneten Menge M = {c, f, i, m, p, s} als Eingabe, wobei aus einer Menge stets das alphabetisch kleinste Element zu wählen ist!

M	result	L	x	N	y
c f i m p s	∅	*c f i m p s*	*c*	*f i m p s*	*f*
				i m p s	*i*
				m p s	*m*
		f i m p s	*m*	*f i m p s*	
				f i p s	*f*
		i m p s		*i p s*	*i*
		m p s		*p s*	*p*
		p s	*p*	*p s*	
				s	*s*
				∅	
	p	*s*	*s*	∅	
	p s	∅			

Aufgabe 5: Ein Fixpunktsatz (Punkte: 15 |..........)

Ist G eine Menge und $f : \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(G)$ ein isotoner Ordnungshomomorphismus, d.h. gilt

$$\forall M, N \subseteq G : (M \subseteq N \;\Rightarrow\; f(M) \subseteq f(N)),$$

so hat f mindestens einen **Fixpunkt**, d.h. es gilt

$$\exists F \subseteq G : f(F) = F.$$

Beweis. Wir setzen

$$\mathcal{F} := \{M \subseteq G \mid M \subseteq f(M)\}, \qquad F := \bigcup \mathcal{F}$$

und zeigen, dass F ein Fixpunkt ist, so:

(1) $F \subseteq f(F)$.

(2) $f(F) \subseteq F$.

Um (1) zu zeigen, sei $x \in F$ beliebig gewählt. Zeigen Sie: $x \in f(F)$!

Da $x \in F = \bigcup \mathcal{F}$, gibt es ein $M \in \mathcal{F}$ mit $x \in M$.

Da $M \in \mathcal{F}$ ist $M \subseteq f(M)$.

Da $M \in \mathcal{F}$ ist $M \subseteq \bigcup \mathcal{F} = F$. Da f isoton ist, folgt $f(M) \subseteq f(F)$.

Aus $x \in M$ und $M \subseteq f(M)$ und $f(M) \subseteq f(F)$ folgt $x \in f(F)$.

Um (2) zu zeigen, verwenden Sie (1) und die Isotonie von f!

Nach (1) gilt $F \subseteq f(F)$.

Da f isoton ist, folgt $f(F) \subseteq f(f(F))$.

Daher ist $f(F) \in \mathcal{F}$.

Also ist $f(F) \subseteq \bigcup \mathcal{F} = F$.

Aufgabe 6: Vollständige Induktion

(Punkte: 14 |..........)

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion nach n:

(1) $\forall n \in \mathbf{N}_0 \; \forall x \in \mathbf{R}$ mit $x > -1 : (1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Beweis.

Induktionsanfang n = 0: $(1 + x)^0 = 1 \geq 1 = 1 + 0 * x$.

Induktionsannahme: (1) gilt für n.

Induktionsschluss von n auf n + 1: Zu zeigen ist $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$.

$$
\begin{aligned}
(1 + x)^{n+1} &= (1 + x)^n * (1 + x) && \text{nach Induktionsannahme, falls } 1 + x > 0 \text{, d.h. } x > -1 \\
&\geq (1 + nx) * (1 + x) \\
&= 1 + x + nx + nx^2 && \text{da } n \geq 0 \text{ und } x^2 \geq 0 \\
&\geq 1 + x + nx \\
&= 1 + (n+1)x.
\end{aligned}
$$

*(1) ist die **bernoullische Ungleichung**.*

(2) $\forall n \in \mathbf{N}_0 : \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Beweis.

Induktionsanfang n = 0: $\sum_{k=1}^{0} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = 0 = 0/(0+1)$.

Induktionsannahme: (2) gilt für n.

Induktionsschluss von n auf n + 1: Zu zeigen ist $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{n+1}{n+2}$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k \cdot (k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} && \text{nach Induktionsannahme} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} \\
&= \frac{n \cdot (n+2) + 1}{(n+1) \cdot (n+2)} \\
&= \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1) \cdot (n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1) \cdot (n+2)} \\
&= \frac{n+1}{n+2}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7: Rekursion

(Punkte: 10 |..........)

Berechnen Sie zu

(1) den Funktionen *even*, *odd* : $\boldsymbol{Z} \to \{0, 1\}$,

$$even(p) = \begin{cases} even(-p) & \text{falls } p < 0 \\ 1 & \text{falls } p = 0, \\ odd(p-1) & \text{falls } p > 0 \end{cases}$$

$$odd(p) = \begin{cases} odd(-p) & \text{falls } p < 0 \\ 0 & \text{falls } p = 0 \\ even(p-1) & \text{falls } p > 0 \end{cases}$$

in einer **Gleichungskette**:

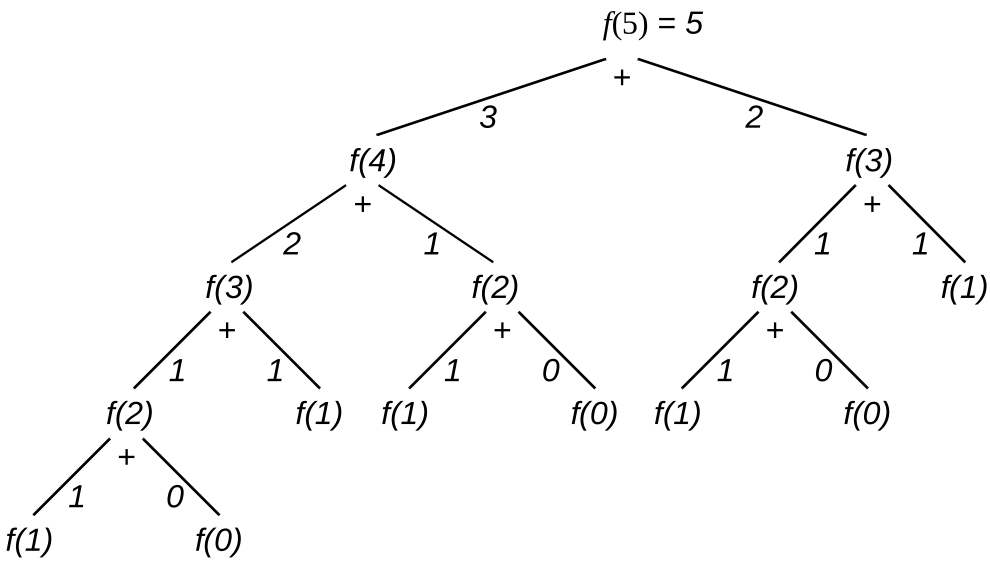
$even(-4) =$

even(4) = odd(3) = even(2) = odd(1) = even(0) = 1.

(2) der Funktion $f : \boldsymbol{N}_0 \to \boldsymbol{N}_0$

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ 1 & \text{falls } n = 1, \\ f(n-1) + f(n-2) & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$

mit einem **Aufrufbaum**:



*f ist die **Fibonacci-Funktion**.*

Aufgabe 8: Teiltrelation

(Punkte: 17 |..........)

Die durch

$$m \mid n \quad :\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbf{N}_0 : k * m = n$$

für $m, n \in \mathbf{N}_0$ definierte **Teiltrelation** ist eine Halbordnung auf $\mathbf{N}_0$.

Beweis.

Reflexivität*:*

Für $m \in \mathbf{N}_0$ gilt $1 \in \mathbf{N}_0$ und $1 * m = m$, also $m \mid m$.

Antisymmetrie*:*

Zu $m, n \in \mathbf{N}_0$ mit $m \mid n$ und $n \mid m$ gibt es $k, l \in \mathbf{N}_0$ mit $k * m = n$ und $l * n = m$.

Durch Einsetzen folgt $k * l * n = n$.

Durch Kürzen folgt $k * l = 1$.

Daraus folgt $k = l = 1$.

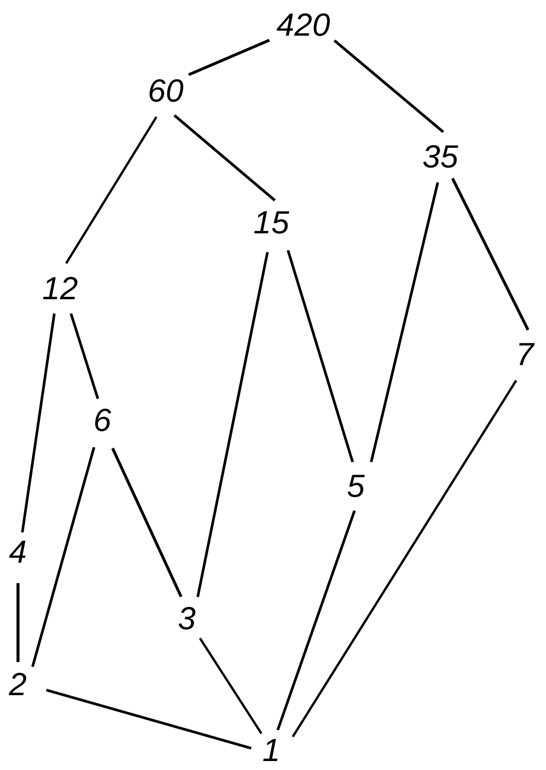
Also ist $m = 1 * m = k * m = n$.

Transitivität*:*

Zu $l, m, n \in \mathbf{N}_0$ mit $l \mid m$ und $m \mid n$ gibt es $j, k \in \mathbf{N}_0$ mit $j * l = m$ und $k * m = n$.

Dann ist $k * j \in \mathbf{N}_0$ und es gilt $k * j * l = k * m = n$, also $l \mid n$.

Zeichnen Sie das **Ordnungsdiagramm** zu {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 15, 35, 60, 420} bzgl. der Teiltrelation!



Aufgabe 9: Kongruenz, Restklassen (Punkte: 20 |..........)

Die zu $n \in \boldsymbol{N}_0$ durch

$$p \equiv_n q \quad :\Leftrightarrow \quad n \mid p - q$$

für $p, q \in \boldsymbol{Z}$ definierte **Kongruenz modulo *n*** ist eine Äquivalenzrelation auf $\boldsymbol{Z}$.

Beweis.

Reflexivität*:*

Für $p \in \boldsymbol{Z}$ gilt $p - p = 0$.

Nach Satz 5.28 (1) gilt $n \mid 0$, also $n \mid p - p$, also $p \equiv_n p$.

Symmetrie*:*

Für $p, q \in \boldsymbol{Z}$ mit $p \equiv_n q$ gilt $n \mid p - q$.

Dann gilt nach Satz 5.28 (10) auch $n \mid -(p - q)$.

Wegen $-(p - q) = q - p$ bedeutet das $n \mid q - p$, also $q \equiv_n p$.

Transitivität*:*

Für $p, q, r \in \boldsymbol{Z}$ mit $p \equiv_n q$ und $q \equiv_n r$ gilt $n \mid p - q$ und $n \mid q - r$.

Dann gilt nach Satz 5.28 (12) auch $n \mid (p - q) + (q - r)$.

Wegen $(p - q) + (q - r) = p - r$ bedeutet das $n \mid p - r$, also $p \equiv_n r$.

Wie zerlegen die **Äquivalenzklassen** (Restklassen) von $\equiv_4$ die Teilmenge

$$\{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}?$$

$[0]_4 \supseteq \{-8, -4, 0, 4, 8\}$

$[1]_4 \supseteq \{-7, -3, 1, 5, 9\}$

$[2]_4 \supseteq \{-6, -2, 2, 6\}$

$[3]_4 \supseteq \{-9, -5, -1, 3, 7\}$

Füllen Sie die **Multiplikationstabelle** zu $\boldsymbol{Z}_5 = \boldsymbol{Z} / \equiv_5$ aus!

$*_5$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
1	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
2	*0*	*2*	*4*	*1*	*3*
3	*0*	*3*	*1*	*4*	*2*
4	*0*	*4*	*3*	*2*	*1*