

Theoretische Grundlagen 2

Prüfung im Sommersemester 2004

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Hochschule Reutlingen - Reutlingen University

Fachbereich: Informatik

Bachelor-Studiengang/Semester: Medien- und Kommunikationsinformatik 2

Prüfer: Prof. Dr. Karlheinz Hug

Prüfungstermin (Datum, Uhrzeit) und Ort: Fr 9. 7. 2004, 10³⁰-12³⁰ Uhr, Aula

Prüfungsdauer: 120 Minuten

Zugelassene Hilfsmittel: Alle (Vorlesungsmitschrift, Literatur,...)

Anzahl der Aufgabenseiten: 10

Aufgabe	Punkte		Aufgabe	Punkte	
	möglich	erreicht		möglich	erreicht
1	32		6	14	
2	10		7	10	
3	12		8	17	
4	18		9	20	
5	15				
Summe möglich:		148	Summe erreicht:		

- Zum Bestehen der Prüfung sind 60, für die Note „Eins“ 120 Punkte erforderlich.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben möglichst auf dazu freigelassenen Stellen im Text!
- Teilaufgaben sind meist unabhängig voneinander lösbar.
- Geben Sie alle Aufgaben- und Lösungsblätter ab!



Viel Erfolg!

Aufgabe 1: Relation, Eigenschaften, Zugeordnetes (Punkte: 32 |.....)

Gegeben sind die Menge $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ und die Relation $R = \{(a, b), (a, d), (b, b), (c, d), (d, e), (e, f), (f, d), (g, g), (g, h)\} \subseteq M^2$.

Zeichnen Sie ein **Pfeildiagramm** zu R !

Begründen Sie, warum R folgende Eigenschaften *nicht* hat!

Eigenschaft	fehlt, weil...
linkstotal	
rechtstotal	
linkseindeutig	
rechtseindeutig	
reflexiv	
irreflexiv	
symmetrisch	
linear (konnex)	
transitiv	
azyklisch	

Geben Sie die Mengen an!

Nachbereich ${}_aR = \dots\dots\dots$; **Vorbereich** $R_d = \dots\dots\dots$

Geben Sie die **Umkehrrelation** und **Kompositionsprodukte** von R an!

R^{-1}	$R^0 = \text{id}_M$	$R^1 = R$	R^2	R^3
		(a, b), (a, d), (b, b), (c, d), (d, e), (e, f), (f, d), (g, g), (g, h)		

Die kleinste R umfassende Äquivalenzrelation auf M hat (**Anzahl**) Äquivalenzklassen.

Die reflexive und transitive Hülle von R ist eine Präordnung Q , die eine Äquivalenzrelation \approx_Q auf M induziert. Die **Äquivalenzklassen** von \approx_Q sind:

.....
Zeichnen Sie ein **Ordnungsdiagramm** zu der durch Q induzierten Halbordnung \leq_Q auf M / \approx_Q !

Eine mit \leq_Q verträgliche **Vollordnung** auf M / \approx_Q ist:

Aufgabe 2: Eigenschaften von Abbildungen

(Punkte: 10 |.....)

Für eine endliche Menge M und eine Abbildung $f: M \rightarrow M$ gilt:

$$f \text{ ist surjektiv} \Leftrightarrow f \text{ ist injektiv} \Leftrightarrow f \text{ ist bijektiv.}$$

Beweis.

Die Abbildung $g: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, p \mapsto 2p$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.

Beweis.

Die Abbildung $h: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, p \mapsto p \operatorname{div} 2$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.

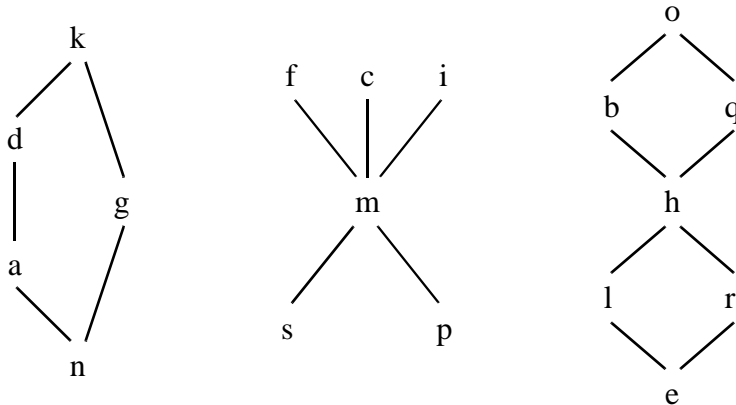
Beweis.

Aufgabe 3: Ordnungsrelation, Ketten, Antiketten (Punkte: 12 |.....)

Der **Satz von Dilworth** setzt eine endliche halbgeordnete Menge $\langle G, \leq \rangle$ voraus.

- (1) Die minimale Mächtigkeit einer Zerlegung von G in Ketten ist gleich der maximalen Mächtigkeit einer Antikette in G .

Veranschaulichen Sie diese Aussage, indem Sie zu dem Ordnungsdiagramm angeben:



Eine **Zerlegung in** möglichst wenige **Ketten**: Mächtigkeit:

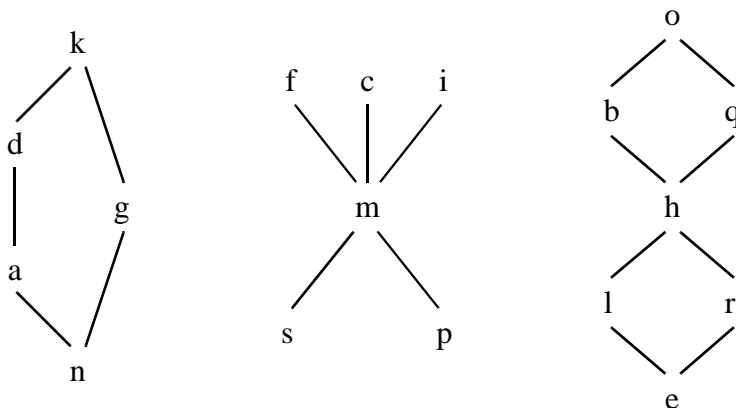
.....

Eine möglichst große **Antikette**: Mächtigkeit:

.....

- (1) Die minimale Mächtigkeit einer Zerlegung von G in Antiketten ist gleich der maximalen Mächtigkeit einer Kette in G .

Veranschaulichen Sie diese Aussage, indem Sie zu dem Ordnungsdiagramm angeben:



Eine **Zerlegung in** möglichst wenige **Antiketten**: Mächtigkeit:

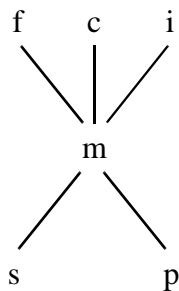
.....

Eine möglichst lange **Kette**: Mächtigkeit:

.....

Aufgabe 4: Ordnungsrelation, Bereiche, Extrema (Punkte: 18 |.....)

Markieren Sie die (a) **minimalen**, (b) **maximalen Elemente** im Ordnungsdiagramm:



Geben Sie die Mengen an!

Nachbereich $s \leq =$

Vorbereich $\leq_f =$

Intervall $[p, c]_{\leq} = p \leq \cap \leq_c =$

Verfolgen Sie den **Ablauf des Algorithmus**

```

min(M) =
  result := ∅;
  L := M;
  WHILE L ≠ ∅ DO
    x := ein z ∈ L;
    N := L \ {x};
    WHILE N ≠ ∅ DO
      y := ein z ∈ N;
      IF x < y THEN
        L := L \ {y}
      ELSIF y < x THEN
        L := L \ {x};
        x := y;
        N := L
      END;
      N := N \ {y}
    END;
    result := result ∪ {x};
    L := L \ {x};
  END;
  
```

ASSERT result ⊆ min(M) ⊆ result ∪ L;

ASSERT y ∉ min(M);

ASSERT x ∉ min(M);

ASSERT result ⊆ min(M) ⊆ result ∪ L
 ASSERT L = ∅ ∧ result = min(M).

mit der nach obigem Diagramm geordneten Menge $M = \{c, f, i, m, p, s\}$ als Eingabe, wobei aus einer Menge stets das alphabetisch kleinste Element zu wählen ist!

M	result	L	x	N	y
c f i m p s					

Aufgabe 5: Ein Fixpunktsatz

(Punkte: 15 |.....)

Ist G eine Menge und $f: \mathcal{P}(G) \rightarrow \mathcal{P}(G)$ ein isotoner Ordnungshomomorphismus, d.h. gilt

$$\forall M, N \subseteq G : (M \subseteq N \Rightarrow f(M) \subseteq f(N)),$$

so hat f mindestens einen **Fixpunkt**, d.h. es gilt

$$\exists F \subseteq G : f(F) = F.$$

Beweis. Wir setzen

$$\mathcal{F} := \{M \subseteq G \mid M \subseteq f(M)\}, \quad F := \bigcup \mathcal{F}$$

und zeigen, dass F ein Fixpunkt ist, so:

(1) $F \subseteq f(F)$.

(2) $f(F) \subseteq F$.

Um (1) zu zeigen, sei $x \in F$ beliebig gewählt. Zeigen Sie: $x \in f(F)$!

Um (2) zu zeigen, verwenden Sie (1) und die Isotonie von f !

Aufgabe 6: Vollständige Induktion

(Punkte: 14 |.....)

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion nach n :

(1) $\forall n \in N_0 \forall x \in \mathbf{R}$ mit $x > -1 : (1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Beweis.

(2) $\forall n \in N_0 : \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Beweis.

Aufgabe 7: Rekursion

(Punkte: 10 |.....)

Berechnen Sie zu

(1) den Funktionen $even, odd : \mathbf{Z} \rightarrow \{0, 1\}$,

$$even(p) = \begin{cases} even(-p) & \text{falls } p < 0 \\ 1 & \text{falls } p = 0, \\ odd(p-1) & \text{falls } p > 0 \end{cases}$$

$$odd(p) = \begin{cases} odd(-p) & \text{falls } p < 0 \\ 0 & \text{falls } p = 0 \\ even(p-1) & \text{falls } p > 0 \end{cases}$$

in einer **Gleichungskette**:

$$even(-4) =$$

(2) der Funktion $f: \mathbf{N}_0 \rightarrow \mathbf{N}_0$

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ 1 & \text{falls } n = 1, \\ f(n-1) + f(n-2) & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$

mit einem **Aufrufbaum**:

$$f(5)$$

Aufgabe 8: Teiltrelation

(Punkte: 17 |.....)

Die durch

$$m \mid n \quad :\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N}_0 : k * m = n$$

für $m, n \in \mathbb{N}_0$ definierte **Teiltrelation** ist eine Halbordnung auf \mathbb{N}_0 .

Beweis.

Zeichnen Sie das **Ordnungsdiagramm** zu $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 15, 35, 60, 420\}$ bzgl. der Teiltrelation!

Aufgabe 9: Kongruenz, Restklassen

(Punkte: 20 |.....)

Die zu $n \in \mathbb{N}_0$ durch

$$p \equiv_n q \quad :\Leftrightarrow \quad n \mid p - q$$

für $p, q \in \mathbb{Z}$ definierte **Kongruenz modulo n** ist eine Äquivalenzrelation auf \mathbb{Z} .**Beweis.**Wie zerlegen die **Äquivalenzklassen** (Restklassen) von \equiv_4 die Teilmenge $\{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?Füllen Sie die **Multiplikationstabelle** zu $\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z} / \equiv_5$ aus!

$*_5$	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					